

1

La deformació per tallant

1.1 Introducció

És ben conegut que en el càlcul d'estructures d'edificació s'utilitza sovint el model de les estructures de barres. En aquest model, l'estructura s'assimila a un conjunt d'elements lineals, rectes, de secció i material constant que anomenem barra. Aquest model és fàcilment aplicable a estructures de pòrtics (pilars i jàsseres), encavallades, bigues contínues, etc., on la relació entre els elements constructius i les barres és evident.

En altres casos, utilitzant el càlcul per franges o bandes unitàries, utilitzem el model de barres per calcular superfícies de gran longitud: murs o pantalles de contenció, lloses de forjat, etc., i fins i tot, com és el cas dels pòrtics virtuals, s'arriben a analitzar estructures més complexes com són els forjats reticulars o en llosa.

En el càlcul d'aquest tipus d'estructures, una vegada establert el model geomètric, s'introdueixen accions que s'apliquen indistintament al llarg de les barres o en els seus extrems (accions als nusos). El càlcul proporciona dos tipus d'informació:

- la deformació de l'estructura: desplaçament i gir dels nusos, i la deformació de les barres que deixen de ser elements rectes.
- els esforços als que se sotmet: axials, flectors i tallants (en dues dimensions) i, a més, torçors, tallants i flectors transversals (en tres dimensions)

1.2 Esforços i deformacions. La fletxa

La relació entre els esforços i les deformacions és total. Els uns produeixen els altres, i cal trobar un estat determinat de deformacions que produeixi uns esforços que equilibrin les accions aplicades a l'estructura. Aquesta és la finalitat del càlcul de l'estructura i, per tant, la finalitat de la majoria del programari d'estructures.

Quan les deformacions són petites, com és el cas de la majoria de les estructures d'edificació, la relació entre els esforços i les deformacions té una gran simplicitat:

- Els esforços axials produeixen un allargament (tracció) o escurçament (compressió) de les barres.
- Els esforços de flexió produeixen la deformació transversal de la barra, és a dir, la seva fletxa f .

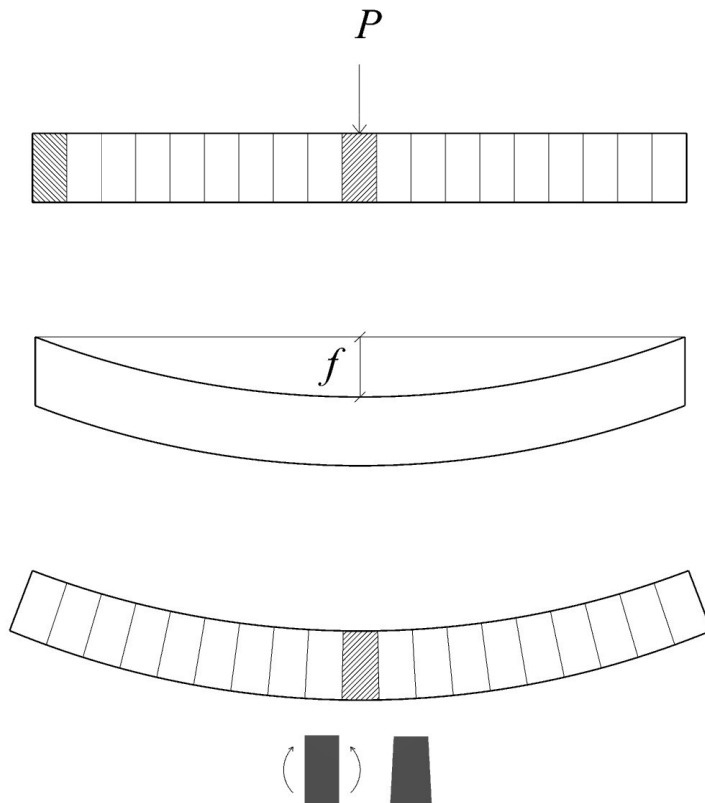


Figura .1

- Els esforços de tallant no produeixen cap deformació significativa.

Això que acabem de dir pot constatar-se fàcilment en la majoria de promptuaris, llibres i, fins i tot, programes informàtics o les fórmules del càlcul de la fletxa d'una barra sotmesa a un determinat estat de càrregues es correspon a la deformació per flexió exclusivament.

Ara bé, la realitat no és així de simple i, quan les deformacions són grans o les barres són curtes, cal tenir en compte la complexa interrelació que hi ha amb tots els esforços i totes les deformacions. En aquest sentit és bastant conegut el concepte del P-Delta que utilitzen alguns programes informàtics per tal de donar més o menys rigidesa a una barra (i per tant menor o major deformació transversal) en funció de l'esforç axial al que està sotmesa.

En aquest sentit podem dir que la fletxa total d'una barra és, en realitat,

$$\Delta = \delta_t = \delta_f + \delta_s + \delta_a \quad (1.1)$$

on δ_t és la fletxa total, δ_f és la fletxa per flexió (la que calculem normalment) i δ_s

és la fletxa per tallant (la que oblidem normalment) i δ_a la fletxa per axial (que rep el nom de vinclament quan és compressió i que gairebé sempre oblidem quan és de tracció).

Podem resumir aquesta complexitat amb aquest conceptes:

- Els esforços tallants provoquen una deformació de la barra que s'acumula a la deformació per flexió

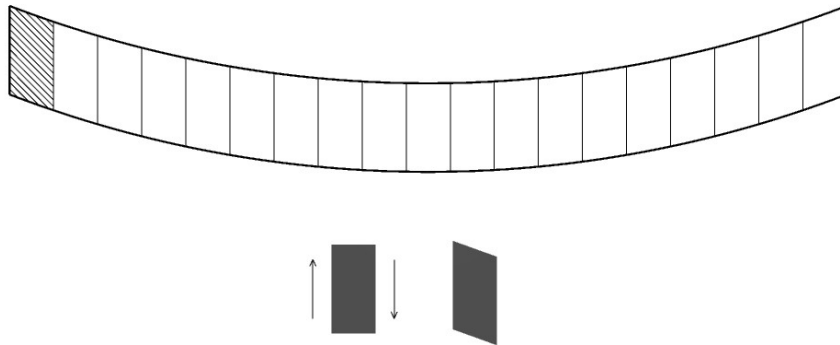


Figura 2

- Les deformacions per flexió d'una barra representen un allargament de la barra, ja que originàriament la barra era recta i per tant més curta. Així doncs, les deformacions per flexió afecten als esforços axials (provoquen una tracció a la barra, sempre i quan no tinguin els nusos extrems lliures de desplaçament).
- Si hi ha esforços axials en una barra, aquests esforços i la fletxa que pugui tenir la barra provoquen un moment. Si l'esforç és de compressió aquest moment augmenta la fletxa i, conseqüentment, torna a augmentar el moment provocat. Es tracta del conegut fenomen de vinclament i, si se supera la càrrega crítica d'Euler, la barra es incapaç de suportar aquest esforç i es trenca. Per contra, si l'esforç és de tracció, el moment tendeix a reduir la fletxa de flexió. (P-Delta)

Ja hem comentat que l'axial a compressió pot produir vinclament, i aquest no acostumem a oblidar-lo. Llavors, per què oblidem sovint la fletxa produïda pel tallant o per l'axial a tracció? Doncs perquè aquests valors solen ser molt petits comparats amb els valor de la fletxa per flexió. Hi ha, però, dos casos en els quals això no és així i els estudiarem tot seguit:

- 1) Quan la barra és molt rígida, és a dir, el cantell i per tant la inèrcia de la secció és important davant la longitud de la barra, la fletxa per flexió és molt petita i en aquest cas la fletxa per tallant pot arribar a ser fins i tot més gran que la pròpia fletxa per flexió. És el cas de les bigues paret o, simplement, de les bigues o pilars de gran cantell, pilars pantalla, etc.
- 2) Quan la barra és molt deformable, és a dir, la longitud és molt gran comparada amb la secció transversal, o el mòdul de deformació E del material és petit, la fletxa teòrica a flexió es fa tan gran que suposaria un augment de

longitud molt important de la barra. Si els extrems de la barra estan fixats i no es poden moure, la barra queda sotmesa a tracció i apareix una fletxa axial, de valor negatiu ja que impedeix que es deformi el valor teòric.

1.3 Els tallants i la fletxa

En els punts anteriors hem comentat que la fletxa d'una biga sotmesa a flexió i a tallant és

$$\Delta = \delta_t = \delta_f + \delta_s$$

Aquesta equació, però, es pot escriure també de la següent forma:

$$\Delta = \delta_t = \delta_f(I+w) \quad (1.2)$$

on w és el **coeficient de fletxa de tallant** i equival a δ_s/δ_f , és a dir, un valor zero si no tenim en compte la fletxa per tallant i un valor real positiu en la resta de casos.

L'efecte de l'esforç tallant en el càlcul de les fletxes en les bigues va ser introduït, d'acord amb el text de Timoshenko¹, per Poncelet (1788-1867). Molts han estat els autors que han dedicat la seva recerca a trobar fórmules que permetin conèixer el valor d'aquestes deformacions per tallant.

Un dels mètodes més interessants és el de la *Càrrega Unitat* a través del *Principi dels Treballs Virtuals*^{II}. En aquest mètode considerem que el treball efectuat per una càrrega unitària (força o moment), en un punt d'una barra ja carregada (treball extern), en el seu desplaçament (fletxa o gir) correspon a tots els treballs, tensions per deformacions, integrats en tot el volum de la biga (treball intern).

La fórmula resultant és la següent, on Δ representa la deformació total (fletxa o gir) d'una biga en un punt determinat, on el moment de les accions reals és M_L i el tallant V_L , mentre que M_U i V_U són el moment i el tallant provocats per una acció unitària (força o moment) aplicada en el punt on volem saber el valor de la fletxa o gir.

$$\Delta = \int \frac{M_U M_L dx}{EI} + \int \frac{f_s V_U V_L dx}{GA} \quad (1.3)$$

Si el que busquem és un desplaçament (la fletxa habitual) la càrrega unitària és una força perpendicular unitària, mentre que si el que busquem és un gir, llavors la càrrega unitària és un moment unitari.

E i G són els valors del mòdul d'elasticitat lineal i del mòdul d'elasticitat de tallant respectivament, A i I són les dades de la secció transversal de la barra, àrea i inèrcia i, finalment, f_s és l'anomenat **factor de forma a tallant**, que val

^I Pàg. 241, Mecánica de Materiales, S.P. Timoshenko & J.M. Gere, Unión Tipográfica Editorial Hispano-Americana, México, 1974

^{II} Pàg. 420 - 426, Mecánica de Materiales, S.P. Timoshenko & J.M. Gere, Unión Tipográfica Editorial Hispano-Americana, México, 1974

$$f_s = \frac{A}{I^2} \int_A \frac{Q^2}{b^2} dA \quad (1.4)$$

on Q és el moment estàtic de la secció, i b n'és l'ample.

1.4 Àrea efectiva a tallant

El factor de forma a tallant també es fa present d'una altra manera, en els càlculs de les barres, a través de l'anomenada **àrea efectiva a tallant**. Si escrivim la equació anterior de la forma següent

$$A_s = \frac{A}{f_s} = \frac{I^2}{\int_A \frac{Q^2}{b^2} dA} \quad (1.5)$$

veurem que obtenim un valor de l'àrea partit pel factor de forma a tallant. Aquesta és l'àrea que hauríem d'utilitzar en aquells càlculs on s'estudia el tallant. A continuació hi ha una taula amb els factors de forma més habituals.

Tipus de secció	Factor de forma a tallant f_s	Àrea efectiva a tallant A_s
Rectangular	1,2	$A / 1,2$
Circular	10 / 9	$0,9 A$
Tub rodó prim	2	$\pi R \cdot t$
Tub rectangular prim	$A_t / 2 \cdot t \cdot h$	$2 \cdot t \cdot h$
Perfil I, H vertical (1)	A_t / A_w	$t_w \cdot h$
Perfil I, H horitzontal (2)	$3/5 \cdot A_t / t_a \cdot b$	$5/3 \cdot t_a \cdot b$

A, A_t = àrea total de la secció de la barra

A_s = àrea efectiva a tallant

R = radi del tub

t = gruix del tub

A_w = àrea de l'ànima del perfil

t_w = gruix de l'ànima del perfil

t_a = gruix de l'ala del perfil

h = cantell (ànima) del perfil

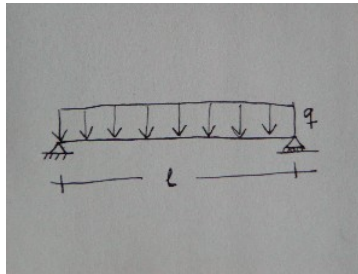
b = ample (ala) del perfil

(1) = càrrega paral·lela a l'ànima

(2) = càrrega paral·lela a les ales

1.5 La biga simple amb càrrega uniforme

Un dels casos més simples que es pot presentar en l'estudi d'una barra és el de la biga simple (un nus articulat i l'altre articulat i lliure de desplaçament horitzontal) sotmesa a una càrrega uniforme.



És ben conegut per la resistència de materials que la fletxa per flexió en el punt central d'aquesta biga és

$$\delta_f = \frac{5ql^4}{384EI} \quad (1.6)$$

però aquest valor tan conegut és el que correspon a la fletxa per flexió. De fet és el primer terme de l'equació (3), tenint en compte que $M_U = x/2$ (moment produït per un força unitària al punt central de la biga) i que $M_L = (qlx/2 - qx^2/2)$ (moment produït per la càrrega uniforme q al llarg de la biga).

$$\delta_f = \int \frac{M_U M_L dx}{EI} = 2 \int_0^{l/2} \frac{(x/2)(qlx/2 - qx^2/2)}{EI} dx \quad (1.7)$$

Com que la deformació és simètrica respecte del punt central hem integrat fins la meitat i ho hem multiplicat per dos. Però de l'equació (3) ens falta el segon terme que és la fletxa per tallant.

$$\delta_s = \int \frac{f_s V_U V_L dx}{GA} \quad (1.8)$$

en aquest cas el tallant de la càrrega repartida és $V_L = ql/2 - qx$, mentre que el tallant de la càrrega puntal unitària al mig és $V_U = 1/2$, fins a la meitat, per tant a l'hora d'integrar al llarg de la barra tindrem que:

$$\delta_s = 2 \int_0^{l/2} \frac{f_s V_U V_L dx}{GA} = 2 \frac{f_s}{GA} \int_0^{l/2} \frac{1}{2} \left(\frac{ql}{2} - qx \right) dx$$

desenvolupant la integral obtenim

$$\delta_s = \frac{f_s ql^2}{8GA} \quad (1.9)$$

i per tant la fletxa total de la biga, en el punt central, és

$$\Delta = \frac{5ql^4}{384EI} + \frac{f_s ql^2}{8GA} \quad (1.10)$$

que expressat en la forma de l'equació (2) és

$$\Delta = \frac{5ql^4}{384EI} \left(1 + \frac{48f_s EI}{5GA l^2} \right) = \frac{5ql^4}{384EI} \left(1 + \frac{48}{5} \Omega \right) \quad (1.11)$$

NOTA:

Atès que aquest valor l'utilitzarem molt sovint, l'anomenarem Ω per tal de simplificar la formulació, així:

$$\Omega = \frac{f_s EI}{GA l^2} \quad (1.12)$$

És important aquest valor? Què passa quan la majoria de vegades no el tenim en compte? Quan cal calcular-lo? Aquestes preguntes tenen una resposta difícil de precisar, ja que tractant-se de valors molt variables cal que sigui el propi usuari qui en prengui una decisió.

I els programes informàtics, ho tenen en compte? La resposta també és variada, n'hi ha que sí i n'hi ha que no. Moltes vegades, però, és una informació que no ve establerta en les instruccions o documentació del programa i caldrà comprovar-ho amb algun exemple molt simple, fent els corresponents càlculs a mà i comparant els resultats.

Això és el que hem fet nosaltres amb dos programes diferents: WinEva (v.4) i SAP2000 (v.7). WinEva4 no té en compte les deformacions per tallant de les bigues, mentre que SAP2000 sí que les té en compte.

1.6 Importància de la fletxa de tallant

Per tal de valorar la importància de la fletxa de tallant podem utilitzar el cas anterior i fer una valoració numèrica d'un cas típic. Suposem una barra de secció transversal rectangular $b \times h$ i un material en el qual $G = 0,4 E$, relació habitual en molts materials d'edificació. Com que el coeficient de fletxa de tallant (11) val

$$w = \frac{48f_s EI}{5GA l^2}$$

atès que

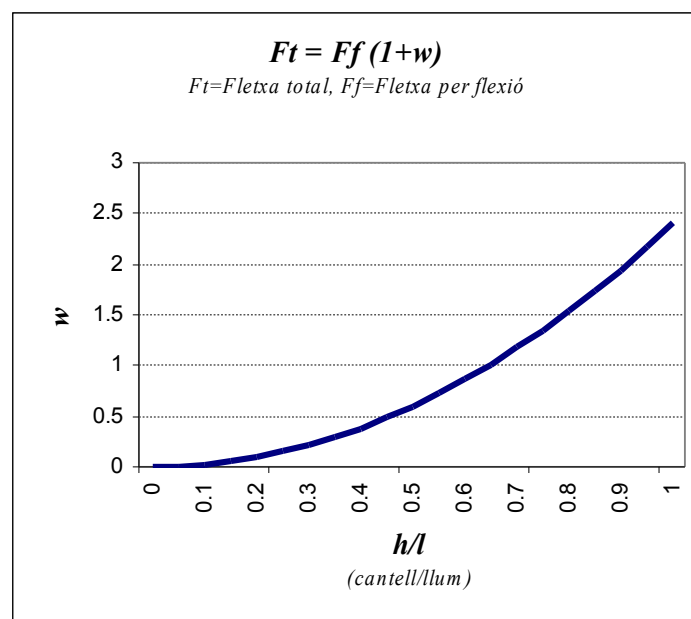
$$f_s = 1,2 \quad ; \quad \frac{E}{G} = 2,5 \quad ; \quad \frac{I}{A} = \frac{bh^3}{12} = \frac{h^2}{12}$$

tenim que per a una biga de secció rectangular

$$w = 2,4 \left(\frac{h}{l} \right)^2 \quad (1.13)$$

Amb una relació $h/l=0,1$, és a dir una biga de 6 m de llum i 60 cm de cantell, per exemple, el coeficient de fletxa de tallant val $w = 0,024 = 2,4\%$. És evidentment un error negligible, però no sempre serà així. Suposem una biga paret de 5 m de llum per 3 m d'alt. En aquest cas $h/l = 0,6$ i $w = 0,864 = 86,4\%$. Ja es veu que la fletxa per tallant és gairebé igual que la fletxa per flexió. No podem oblidar-la!

En el gràfic que trobem a continuació es relaciona la proporció h/l i el coeficient w .



2

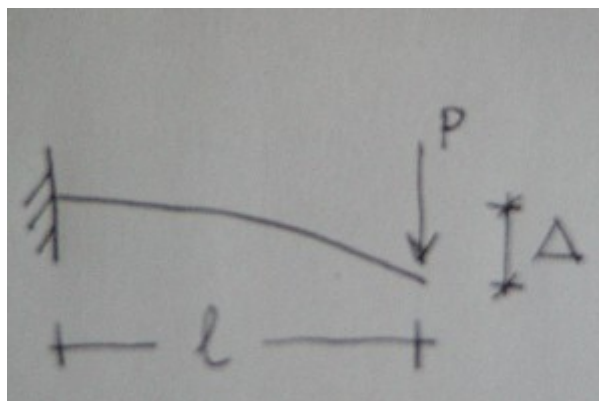
Matriu de rigidesa amb deformació per tallant

2.1 La biga en voladís amb càrrega puntual a la punta

Es tracta d'un altre cas ben típic. Per resistència de materials sabem que la fletxa en l'extrem d'una biga en voladís, amb un càrrega concentrada en el mateix extrem és

$$\delta_f = \frac{Pl^3}{3EI} \quad (2.1)$$

que correspon a la fletxa per flexió.



De fet és el primer terme de l'equació (1.3), però ens falta el segon terme que és la fletxa per tallant. Atès que $V_L = P$ (tallant produït per la força puntual a la punta) i $V_U = I$ (tallant produït per una força unitària a la punta).

$$\delta_s = \int \frac{f_s V_U V_L dx}{GA} = \int \frac{f_s 1 P dx}{GA} = \frac{f_s Pl}{GA} \quad (2.2)$$

en aquest cas

$$\Delta = \delta_t = \delta_f + \delta_s = \frac{Pl^3}{3EI} + \frac{f_s Pl}{GA} \quad (2.3)$$

que segons l'equació (1.2) és

$$\Delta = \frac{Pl^3}{3EI} \left(1 + \frac{3f_s EI}{GA l^2} \right) = \frac{Pl^3}{3EI} (1 + 3\Omega) \quad (2.4)$$

si tenim en compte que el moment d'encastament val $M = Pl$ també podem escriure l'equació (2.4) de la forma següent

$$\Delta = \frac{Ml^2}{3EI} (1 + 3\Omega) \quad (2.5)$$

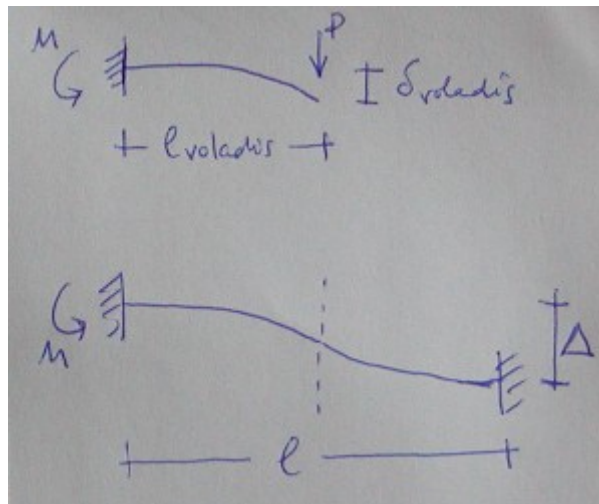
2.2 El desplaçament transversal d'un extrem

El cas de la biga rígida amb desplaçament transversal d'un extrem el podem considerar com si estigués formada per dues bigues en voladís, capiculades, de longitud meitat i amb el desplaçament de la punta del voladís igual a la meitat del desplaçament transversal dels extrems.

$$\Delta = \delta_t = 2\delta_{\text{voladís}}$$

$$l = 2l_{\text{voladís}}$$

$$M = Pl_{\text{voladís}} = Pl/2$$



per tant podem rescriure l'equació (17) de la forma següent:

$$\Delta = 2 \frac{P(l/2)^3}{3EI} \left(1 + \frac{3f_s EI}{GA(l/2)^2} \right) \quad (2.6)$$

o el que és el mateix

$$\Delta = \frac{Pl^3}{12EI} \left(1 + \frac{12f_s EI}{GA l^2} \right) = P \frac{l^3}{12EI} (1 + 12\Omega) \quad (2.7)$$

Si relacionem la força P amb la deformació transversal dels extrems tenim que

$$P = \Delta \frac{12EI}{l^3} \cdot \frac{1}{(1 + 12\Omega)} \quad (2.8)$$

Atès que $M = Pl/2$ també podem posar l'equació d'aquesta forma:

$$M = \Delta \frac{6EI}{l^2} \cdot \frac{1}{(1 + 12\Omega)} \quad (2.9)$$

Ara bé, aquestes relacions entre el desplaçament transversal dels extrems d'una barra rígida, amb el moment i la força, també transversal, que es genera en aquests extrems no són res més que uns dels termes de la matriu de rigidesa d'una barra rígida. A continuació tenim la matriu de rigidesa K_f típica d'una barra rígida en dues dimensions (2D), considerant només les deformacions produïdes per flexió i oblidant la repercussió del tallant.

$$K_f = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} & 0 & -\frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} \\ 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} & 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} \\ -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} & 0 & \frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} \\ 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} & 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

Això ens fa pensar que la influència de la deformació per tallant en les barres no és només una cosa que afecta a la fletxa de la barra, com hem vist fins ara, sinó que afecta a la matriu de rigidesa de la pròpia barra i, per tant, a la relació entre barres a través de la matriu de rigidesa general de l'estructura.

Caldrà, doncs, tenir en compte aquests conceptes a l'hora d'interpretar els resultats del càlcul d'una estructura realitzada mitjançant càlcul matricial, ja que si no es tenen en compte les deformacions per tallant (cosa habitual en alguns programes) pot donar lloc a errors significatius en aquells casos en que hi hagi barres molt rígides (barres curtes o barres amb cantells exagerats).

2.3 Matriu de rigidesa modificada d'una barra rígida

Si anomenem F_{ss} al valor

$$F_{ss} = \frac{1}{(1 + 12\Omega)} \quad (2.11)$$

podem començar a modificar la matriu de rigidesa d'una barra rígida per tal d'obtenir una matriu K on també s'hagi tingut en compte l'efecte del tallant, segons les equacions (20) i (21).

$$\begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{l^3} F_{ss} & \frac{6EI}{l^2} F_{ss} & 0 & -\frac{12EI}{l^3} F_{ss} & \frac{6EI}{l^2} F_{ss} \\ 0 & \frac{6EI}{l^2} F_{ss} & \frac{4EI}{l} & 0 & -\frac{6EI}{l^2} F_{ss} & \frac{2EI}{l} \\ -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{l^3} F_{ss} & -\frac{6EI}{l^2} F_{ss} & 0 & \frac{12EI}{l^3} F_{ss} & -\frac{6EI}{l^2} F_{ss} \\ 0 & \frac{6EI}{l^2} F_{ss} & \frac{2EI}{l} & 0 & -\frac{6EI}{l^2} F_{ss} & \frac{4EI}{l} \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

Tenint en compte que el terme EA/l no depèn de l'esforç tallant ni de la flexió, sinó només dels esforços axials, romandrà constant, però no passarà el mateix amb els altres termes i per tant podem imaginar que la forma final de la matriu K de rigidesa de la barra serà la següent

$$K = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{l^3} F_{ss} & \frac{6EI}{l^2} F_{ss} & 0 & -\frac{12EI}{l^3} F_{ss} & \frac{6EI}{l^2} F_{ss} \\ 0 & \frac{6EI}{l^2} F_{ss} & \frac{4EI}{l} F_{tt} & 0 & -\frac{6EI}{l^2} F_{ss} & \frac{2EI}{l} F_{uu} \\ -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{l^3} F_{ss} & -\frac{6EI}{l^2} F_{ss} & 0 & \frac{12EI}{l^3} F_{ss} & -\frac{6EI}{l^2} F_{ss} \\ 0 & \frac{6EI}{l^2} F_{ss} & \frac{2EI}{l} F_{uu} & 0 & -\frac{6EI}{l^2} F_{ss} & \frac{4EI}{l} F_{tt} \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

A continuació farem l'anàlisi del comportament de un cert tipus de barres, tenint en compte els efectes de deformació per esforç tallant, a fi i efecte d'obtenir els valors de F_{tt} i F_{uu} .

2.4 Biga biarticulada. Moments i girs.

Per al càlcul del terme F_{uv} , si utilitzéssim directament la biga rígida, ens trobaríem amb una biga hiperestàtica de la qual no coneixem les reaccions als extrems, ja que les que coneixem i utilitzem habitualment només tenen en compte la flexió i no l'esforç tallant. Si no coneixem les reaccions als extrems tampoc no sabem el valor del moment ni del tallant al llarg de la biga i no podem utilitzar les equacions integrals que hem utilitzat fins ara.

És per això que començarem per la biga biarticulada. En aquest cas, en aplicar un moment M_a a l'extrem esquerre A , les reaccions són isostàtiques $R_a = M_a / l$ i per tant ja tenim les equacions dels moments i tallants al llarg de la biga.

Aquests valors són:

$$M_L = M_a(l - x)/l \quad ; \quad V_L = M_a / l$$

Si volem conèixer el gir del nus esquerre φ_a , col·locarem un moment unitari en aquest nus que donarà una equació de moments i tallants de la forma:

$$M_U = (l - x)/l \quad ; \quad V_U = 1/l$$

i per tant

$$\begin{aligned} \varphi_a &= \int \frac{M_U M_L dx}{EI} + \int \frac{f_s V_U V_L dx}{GA} = \frac{M_a}{EI^2} \int (l - x)^2 dx + \frac{M_a f_s}{GA l^2} \int dx \\ \varphi_a &= \frac{M_a l}{3EI} + \frac{M_a f_s}{GA l} = \frac{M_a l}{3EI} \left(1 + \frac{3f_s EI}{GA l^2} \right) \end{aligned}$$

Com altres vegades veiem que el resultat té un primer terme igual al que ens dona quan només considerem la flexió i un segon terme que anomenem d'efecte de tallant. Escrivim aquesta equació de les formes següents

$$\varphi_a = M_a \frac{l}{3EI} (1 + 3\Omega) \quad (2.14)$$

$$M_a = \varphi_a \frac{3EI}{l} \frac{1}{(1 + 3\Omega)} = \varphi_a \frac{3EI}{l} F_{vv} \quad (2.15)$$

sent

$$F_{vv} = \frac{1}{(1 + 3\Omega)} \quad (2.16)$$

com que $R_a = M_a / l$

$$\varphi_a = R_a \frac{l^2}{3EI} (1 + 3\Omega) \quad (2.17)$$

$$R_a = \varphi_a \frac{3EI}{l^2} F_{vv} \quad (2.18)$$

Per saber el què succeeix a l'altre costat, és a dir, el gir φ_b cal aplicar un moment unitari al nus dret, per tant en aquest cas els valor de moment i tallant produïts per aquest moment unitari seran:

$$M_U = -x/l \quad ; \quad V_U = 1/l$$

i per tant

$$\varphi_b = \int \frac{M_U M_L dx}{EI} + \int \frac{f_s V_U V_L dx}{GA} = \frac{M_a}{EI^2} \int (x^2 - lx) dx + \frac{M_a f_s}{GA l^2} \int dx$$

$$\varphi_b = -\frac{M_a l}{6EI} + \frac{M_a f_s}{GA l} = -\frac{M_a l}{6EI} \left(1 - \frac{6f_s EI}{GA l^2} \right)$$

$$\varphi_b = -M_a \frac{l}{6EI} (1 - 6\Omega) \quad (2.19)$$

$$M_a = -\varphi_b \frac{6EI}{l} \frac{1}{(1 - 6\Omega)} \quad (2.20)$$

Podem relacionar els girs φ_a i φ_b de forma que

$$\frac{\varphi_a}{\varphi_b} = \frac{\frac{M_a l}{3EI} (1 + 3\Omega)}{-\frac{M_a l}{6EI} (1 - 6\Omega)} = -2 \frac{(1 + 3\Omega)}{(1 - 6\Omega)} \quad (2.21)$$

o el que és el mateix

$$\varphi_b = -\frac{\varphi_a}{2} \frac{(1 - 6\Omega)}{(1 + 3\Omega)} \quad (2.22)$$

Si només tinguéssim en compte els efectes de la flexió i oblidéssim els efectes del tallant l'equació coneguda és $\varphi_b = -\varphi_a / 2$.

2.5 Biga articulada encastada. Moment i gir d'un mateix extrem.

Per considerar el nus dret B com a encastat hem d'aconseguir que el gir d'aquest nus sigui zero. El que farem, doncs, serà aplicar a la biga biarticulada, de l'apartat anterior, un moment M_b al nus de la dreta B de forma que anul·li el gir φ_b que hem generat anteriorment.

Pel que hem vist al costat A sabem que, en una biga biarticulada, per aconseguir un gir φ_a cal aplicar un moment M_a . La relació entre aquests valors és:

$$\varphi_a = M_a \frac{l}{3EI} (1 + 3\Omega) \quad (2.23)$$

per tant per aconseguir un gir $-\varphi_b$ caldrà aplicar un moment M_b tal que

$$-\varphi_b = M_b \frac{l}{3EI} (1 + 3\Omega) \quad (2.24)$$

substituint el valor de φ_b tindrem

$$M_a \frac{l}{6EI} (1 - 6\Omega) = M_b \frac{l}{3EI} (1 + 3\Omega)$$

així doncs, el valor de M_b serà

$$M_b = M_a \frac{(1 - 6\Omega)}{2(1 + 3\Omega)} \quad (2.25)$$

Ara bé, aquest moment M_b que hem aplicat al costat dret de la biga ha provocat un gir $\varphi_{a'}$ al costat contrari A . Podem avaluar aquest gir $\varphi_{a'}$ ja que sabem que

$$\varphi_{a'} = - \frac{-\varphi_b (1 - 6\Omega)}{2 (1 + 3\Omega)} \quad (2.26)$$

substituint φ_b pel seu valor

$$\varphi_{a'} = - \frac{1}{2} \left(\frac{M_a l}{6EI} (1 - 6\Omega) \right) \frac{(1 - 6\Omega)}{(1 + 3\Omega)} = - M_a \frac{l}{12EI} \cdot \frac{(1 - 6\Omega)^2}{(1 + 3\Omega)} \quad (2.27)$$

D'aquesta forma sumant els dos estats de la biga, els produïts pel moment M_a i els produïts pel moment M_b , tindrem φ_A , el gir total en els nus esquerre A

$$\begin{aligned} \varphi_A &= \varphi_a + \varphi_{a'} = \frac{M_a l}{3EI} (1 + 3\Omega) - \frac{M_a l}{12EI} \cdot \frac{(1 - 6\Omega)^2}{(1 + 3\Omega)} \\ \varphi_A &= \frac{M_a l}{3EI} (1 + 3\Omega) + \frac{M_a l}{12EI} \cdot \frac{(1 - 6\Omega)^2}{(1 + 3\Omega)} \\ \varphi_A &= \frac{M_a l}{3EI} \left((1 + 3\Omega) - \frac{(1 - 6\Omega)^2}{4(1 + 3\Omega)} \right) = \frac{M_a l}{3EI} \frac{3(1 + 12\Omega)}{4(1 + 3\Omega)} \end{aligned} \quad (2.28)$$

A efectes pràctics, ens interessa escriure aquesta equació de la forma següent

$$M_a = \varphi_A \frac{4EI}{l} \cdot \frac{(1+3\Omega)}{(1+12\Omega)} = \varphi_A \frac{4EI}{l} F_u \quad (2.29)$$

$$F_u = \frac{(1+3\Omega)}{(1+12\Omega)} \quad (2.30)$$

Evidentment, també podem relacionar el gir φ_A total del extrem A amb el moment M_b que simula l'encastament (ja que provoca un gir zero) en l'extrem B de la biga. De la relació entre M_a i M_b que hem vist anteriorment (2.25) podem escriure

$$M_a = M_b \frac{2(1+3\Omega)}{(1-6\Omega)} = \varphi_A \frac{4EI}{l} F_u \quad (2.31)$$

$$M_b = \varphi_A \frac{2EI}{l} \cdot \frac{(1-6\Omega)}{(1+3\Omega)} F_u = \varphi_A \frac{2EI}{l} \cdot F_{uu} \quad (2.32)$$

sent $F_{uu} = \frac{(1-6\Omega)}{(1+3\Omega)} F_u$ i segons (2.30)

$$F_{uu} = \frac{(1-6\Omega)}{(1+12\Omega)} \quad (2.33)$$

També podem estudiar les reaccions que produeix aquest moment M_a en els extrems de la biga articulada encastada. De la biga biarticulada sabem que les reaccions són $R_{a1} = M_a/l$; $R_{b1} = -M_a/l$. Quan apliquem el moment M_b , per tal de simular l'encastament al costat B , apareixen aquestes reaccions

$$R_{a2} = M_b/l \quad ; \quad R_{b2} = -R_{a2}$$

Substituint M_b pel seu valor

$$R_{a2} = \frac{M_a}{2l} \frac{(1-6\Omega)}{(1+3\Omega)} \quad (2.34)$$

obtenim el resultat global $R_a = R_{a1} + R_{a2}$

$$R_a = \frac{M_a}{l} \left(1 + \frac{(1-6\Omega)}{2(1+3\Omega)} \right) \quad ; \quad R_b = -R_a$$

que també podem escriure de la forma següent

$$R_a = \frac{3M_a}{2l} \left(1 - \frac{3\Omega}{1+3\Omega} \right) = \frac{3M_a}{2l} \left(\frac{1}{1+3\Omega} \right) \quad (2.35)$$

on el terme que hi ha fora del parèntesi és la reacció que s'obté quan només es tenen en compte els efectes de flexió i no els de tallant. Si substituïm M_a pel valor de l'equació (2.31) obtenim R_a en funció de l'angle de gir φ_A

$$R_a = \frac{3M_a}{2l} \left(\frac{1}{1+3\Omega} \right) = \varphi_A \frac{6EI}{l^2} \left(\frac{1}{1+3\Omega} \right) F_{tt} = \varphi_A \frac{6EI}{l^2} F_{ss} \quad (2.36)$$

$$R_b = -R_a$$

2.6 Matriu de rigidesa global d'una barra rígida (flexió i tallant)

Una vegada trobats els valor F_{tt} (2.30) i F_{uu} (2.33) ja podem completar la matriu de rigidesa K_{f+s} d'una barra rígida, inclosos els efectes de deformació per tallant, és:

$$K_{f+s} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{l^3} F_{ss} & \frac{6EI}{l^2} F_{ss} & 0 & -\frac{12EI}{l^3} F_{ss} & \frac{6EI}{l^2} F_{ss} \\ 0 & \frac{6EI}{l^2} F_{ss} & \frac{4EI}{l} F_{tt} & 0 & -\frac{6EI}{l^2} F_{ss} & \frac{2EI}{l} F_{uu} \\ -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{l^3} F_{ss} & -\frac{6EI}{l^2} F_{ss} & 0 & \frac{12EI}{l^3} F_{ss} & -\frac{6EI}{l^2} F_{ss} \\ 0 & \frac{6EI}{l^2} F_{ss} & \frac{2EI}{l} F_{uu} & 0 & -\frac{6EI}{l^2} F_{ss} & \frac{4EI}{l} F_{tt} \end{bmatrix} \quad (2.37)$$

on

$$F_{ss} = \frac{1}{(1+12\Omega)} \quad ; \quad F_{tt} = \frac{(1+3\Omega)}{(1+12\Omega)} \quad ; \quad F_{uu} = \frac{(1-6\Omega)}{(1+12\Omega)}$$

Recordem el valor de $\Omega = \frac{f_s EI}{GA l^2}$ segons l'equació (1.12)

3

La biga simple i la biga rígida

3.1 Deformacions d'una biga simple amb una càrrega puntual

Es tracta d'un altre cas típic, molt més general, ja que la càrrega P està situada en un punt qualsevol de la barra, a una distància a dels nus esquerre A i una distància b del nus dret B . Si només consideréssim els efectes de flexió, la fletxa produïda per aquesta càrrega a l'esquerra del punt d'aplicació de la càrrega P és

$$\delta_f = \frac{Plbx}{6EI} \left(1 - \frac{b^2}{l^2} - \frac{x^2}{l^2} \right) \quad (3.1)$$

sent x la distància del punt considerat al nus esquerre, mentre que a la dreta del punt d'aplicació de la càrrega tindrem

$$\delta_f = \frac{Pla(l-x)}{6EI} \left(1 - \frac{a^2}{l^2} - \frac{(l-x)^2}{l^2} \right) \quad (3.2)$$

Què succeeix si tenim en compte l'efecte de fletxa produït pels tallants? Per saber-ho aplicarem, com sempre, la fórmula

$$\delta_s = \int \frac{f_s V_U V_L dx}{GA} \quad (3.3)$$

Segons el punt d'aplicació de la força P i el punt z on volem saber la fletxa, els valors de V_L i V_U són

$V_L = P(l-a)/l$	a l'esquerra del punt d'aplicació de la càrrega
$V_L = -Pa/l$	a la dreta del punt d'aplicació de la càrrega
$V_U = (l-z)/l$	a l'esquerra del punt on volem saber la fletxa
$V_U = -z/l$	a la dreta del punt on volem saber la fletxa

per tant caldrà integrar per a zones diferents, segons que el punt z on volem saber la fletxa estigui a l'esquerra o a la dreta del punt d'aplicació de la càrrega. Comencem pel cas on aquest punt es troba a l'esquerra.

$$\delta_s = \int_0^z \frac{f_s V_U V_L dx}{GA} + \int_z^a \frac{f_s V_U V_L dx}{GA} + \int_a^l \frac{f_s V_U V_L dx}{GA}$$

$$\delta_s = \frac{Pf_s}{GAl^2} \left(\int_0^z (l-a)(l-z) dx + \int_z^a -z(l-a) dx + \int_a^l (az) dx \right) = \frac{Pf_s}{GAl} z(l-a) \quad (3.4)$$

Si el punt z es troba a la dreta del punt d'aplicació de la força P les dades varien lleugerament

$$\delta_s = \int_0^a \frac{f_s V_U V_L dx}{GA} + \int_a^z \frac{f_s V_U V_L dx}{GA} + \int_z^l \frac{f_s V_U V_L dx}{GA}$$

$$\delta_s = \frac{Pf_s}{GAl^2} \int_0^a (l-a)(l-z) dx + \int_a^z -a(l-z) dx + \int_z^l (az) dx = \frac{Pf_s}{GAl} a(l-z) \quad (3.5)$$

Per tant la fletxa total a l'esquerra del punt d'aplicació de P és (recordem que $(l-a) = b$)

$$\delta_{f+s} = \frac{Plbx}{6EI} \left(1 - \frac{b^2}{l^2} - \frac{x^2}{l^2} \right) + \frac{Pf_s}{GAl} xb$$

$$\delta_{f+s} = \delta_f \left(1 + 6\Omega \frac{l^2}{l^2 - b^2 - x^2} \right) \quad (3.6)$$

i a la dreta del punt d'aplicació de la càrrega

$$\delta_{f+s} = \frac{Pla(l-x)}{6EI} \left(1 - \frac{a^2}{l^2} - \frac{(l-x)^2}{l^2} \right) + \frac{Pf_s}{GAl} a(l-x)$$

$$\delta_{f+s} = \delta_f \left(1 + 6\Omega \frac{l^2}{l^2 - a^2 - (l-x)^2} \right) \quad (3.7)$$

Per acabar de conèixer el comportament de la biga ens cal determinar el gir dels extrems. Degut als esforços de flexió aquests girs són:

$$\varphi_a = \frac{Pab}{6EI} (l+b) \quad \varphi_b = -\frac{Pab}{6EI} (l+a) \quad (3.8)$$

però caldrà afegir-hi els girs produïts pel tallant. En aquest sentit aplicarem un gir unitari a cada extrem i utilitzarem la fórmula de la fletxa per tallant, tenint en compte que en aquest cas $V_U = 1/l$ a tot el llarg de la biga, tant si apliquem el moment al nus A com si l'apliquem en el nus B . Per tant

$$\varphi_s = \int_0^a \frac{f_s V_U V_L dx}{GA} + \int_a^l \frac{f_s V_U V_L dx}{GA}$$

$$\varphi_s = \int_0^a \frac{f_s P b dx}{GA l^2} - \int_a^l \frac{f_s P a dx}{GA l^2} = \frac{f_s P}{GA l^2} (ba - a(l - a)) = \frac{f_s P}{GA l^2} (ba - ab) = 0 \quad (3.9)$$

És a dir, el gir dels nusos extrems d'aquesta barra no varia degut a l'efecte de l'esforç tallant, sinó que és només el produït per la flexió.

3.2 Reaccions de la biga rígida amb una càrrega puntual

Una vegada coneguts els girs de la barra simple amb una càrrega puntual, i hem comprovat que no varien a causa de les deformacions per tallant, podem aplicar en els extrems uns moments que provoquin uns girs contraris, $-\varphi_a$ i $-\varphi_b$, de forma que la barra es comporti com a rígida (encastada per cada costat) i observar les reaccions que es produeixen tenint en compte les deformacions per tallant.

Al nus esquerre A aplicarem un moment M_{a1} que provoqui un gir $-\varphi_a$. Mantenint fix el nus B generarà un moment M_{b1} en aquest nus B i unes reaccions R_{a1} i R_{b1} a cada costat. Sabem per (2.29) i (3.8) que

$$M_{a1} = -\varphi_a \frac{4EI}{l} F_{tt} = -\frac{2Pab}{3l^2} (l + b) F_{tt}$$

per (2.32)
$$M_{b1} = -\varphi_a \frac{2EI}{l} F_{uu} = -\frac{Pab}{3l^2} (l + b) F_{uu}$$

per (2.36)
$$R_{a1} = -\varphi_a \frac{6EI}{l^2} F_{ss} = -\frac{Pab}{l^3} (l + b) F_{ss}$$

$$R_{b1} = -R_{a1}$$

Al costat dret B aplicarem un moment M_{b2} que provoqui un gir $-\varphi_b$. Mantenint fix el nus A generarà un moment M_{a2} en aquest nus A i unes reaccions R_{a2} i R_{b2} a cada costat. Sabem per (2.29) i (3.8) que

$$M_{b2} = -\varphi_b \frac{4EI}{l} F_{tt} = \frac{2Pab}{3l^2} (l + a) F_{tt}$$

per (2.32)
$$M_{a2} = -\varphi_b \frac{2EI}{l} F_{uu} = \frac{Pab}{3l^2} (l + a) F_{uu}$$

$$\text{per (2.36)} \quad R_{b2} = -\varphi_b \frac{6EI}{l^2} F_{ss} = \frac{Pab}{l^3} (l+a) F_{ss}$$

$$R_{a2} = -R_{b2}$$

Així doncs, el moment M_a del costat esquerre valdrà $M_a = M_{a1} + M_{a2}$ i el moment M_b del costat dret valdrà $M_b = M_{b1} + M_{b2}$

$$M_a = \frac{Pab}{3l^2} ((l+a)F_{uu} - 2(l+b)F_{tt}) \quad (3.10)$$

$$M_b = \frac{Pab}{3l^2} (2(l+a)F_{tt} - (l+b)F_{uu}) \quad (3.11)$$

Quant a les reaccions hiperestàtiques, haurem de sumar els valors R_{a1} i R_{a2} al valor R_{ai} isostàtic que és un valor conegut $R_{ai} = -Pb/l$

$$R_a = R_{ai} + R_{a1} + R_{a2} = -\frac{Pb}{l} - \frac{Pab}{l^3} (l+b)F_{ss} + \frac{Pab}{l^3} (l+a)F_{ss}$$

$$R_a = -\frac{Pb}{l} \left(1 + \frac{a(b-a)}{l^2} F_{ss} \right) \quad (3.12)$$

El mateix en el costat B . En aquest cas $R_{bi} = -Pa/l$, per tant

$$R_b = R_{bi} + R_{b1} + R_{b2} = -\frac{Pa}{l} + \frac{Pab}{l^3} (l+b)F_{ss} - \frac{Pab}{l^3} (l+a)F_{ss}$$

$$R_b = -\frac{Pa}{l} \left(1 + \frac{b(a-b)}{l^2} F_{ss} \right) \quad (3.13)$$

3.3 La biga articulada-encastada amb una càrrega puntual

Si només volem simular l'encastament per un costat (el dret, per exemple), podem aplicar en aquell extrem un moment que provoqui un gir contrari $-\varphi_b$, de forma que la barra es comporti com a rígida (encastada) pel costat B i articulada pel costat A , i tot seguit observar les deformacions i reaccions que es produeixen tenint en compte les deformacions per tallant.

Al costat dret B aplicarem un moment M_b que provoqui un gir $-\varphi_b$. Tal com hem vist en l'apartat 2.5

$$M_b = -\varphi_b \frac{3EI}{l} F_{vv} = \frac{Pab}{2l^2} (l+a) F_{vv}$$

$$R_{b1} = -\varphi_b \frac{3EI}{l^2} F_{vv} = \frac{Pab}{2l^3} (l+a) F_{vv}$$

$$R_{a1} = - R_{b1}$$

Així doncs ja coneixem el moment M_b del costat dret i les reaccions seran la suma de les isostàtiques més les produïdes pel gir $-\varphi_b$

$$R_a = R_{ai} + R_{a1} = - \frac{Pb}{l} - \frac{Pab}{2l^3}(l + a)F_v$$

$$R_a = - \frac{Pb}{l} \left(1 + \frac{a(b-a)}{2l^2} F_v \right) \quad (3.12)$$

3.4 La biga simple amb un moment puntual

En aquest cas considerarem un moment M que està situada en un punt qualsevol de la barra, a una distància a dels nus esquerre A i una distància b del nus dret B .

Si només consideréssim els efectes de flexió la fletxa produïda per aquest moment a l'esquerra del punt d'aplicació és (sent x la distància del punt considerat al nus esquerre)

$$\delta_f = \frac{Mlx}{6EI} \left(1 - 3\frac{b^2}{l^2} - \frac{x^2}{l^2} \right)$$

i a la dreta del punt d'aplicació de la càrrega

$$\delta_f = \frac{Ml(l-x)}{6EI} \left(1 - 3\frac{a^2}{l^2} - \frac{(l-x)^2}{l^2} \right)$$

Què passarà si tenim en compte l'efecte de fletxa produït pels tallants? Per saber-ho aplicarem com sempre la fórmula

$$\delta_s = \int \frac{f_s V_U V_L dx}{GA}$$

amb una càrrega unitària al punt on volem saber la fletxa. En aquest cas els valors de V_L i V_U són

$V_L = M/l$	tallant produït del moment a tot el llarg de la biga
$V_U = (l-z)/l$	a l'esquerra del punt on volem saber la fletxa
$V_U = -z/l$	a la dreta del punt on volem saber la fletxa

per tant caldrà integrar per a zones diferents, a l'esquerra i a la dreta del punt z on volem avaluar la fletxa. Comencem pel cas on aquest punt es troba a l'esquerra.

$$\delta_s = \int_0^z \frac{f_s V_U V_L dx}{GA} + \int_z^l \frac{f_s V_U V_L dx}{GA}$$

$$\delta_s = \frac{Mf_s}{GA l^2} \left(\int_0^z (l-z) dx + \int_z^l -z dx \right) = \frac{Mf_s}{GA l^2} ((l-z)z - z(l-z)) = 0$$

Veiem, doncs, que l'efecte de la deformació per tallant no modifica la fletxa produïda per un moment flector aplicat en un punt interior de la biga.

Per acabar de conèixer, però, el comportament de la biga ens cal determinar el gir dels extrems. Degut als esforços de flexió aquests girs són:

$$\varphi_a = \frac{Ml}{6EI} \left(3\frac{b^2}{l^2} - 1 \right) \quad \varphi_b = \frac{Ml}{6EI} \left(3\frac{a^2}{l^2} - 1 \right)$$

però caldrà afegir-hi els girs produïts pel tallant. En aquest sentit aplicarem un moment unitari a cada extrem i utilitzarem la fórmula de sempre, tenint en compte que en aquest cas $V_U = 1/l$ a tot el llarg de la biga, tant si apliquem el moment al nus A com si l'apliquem en el nus B . Per tant

$$\varphi_s = \int_0^l \frac{f_s V_U V_L dx}{GA} = \int_0^l \frac{f_s M dx}{GA l^2} = \frac{f_s M}{GA l} = \frac{Ml}{EI} \Omega$$

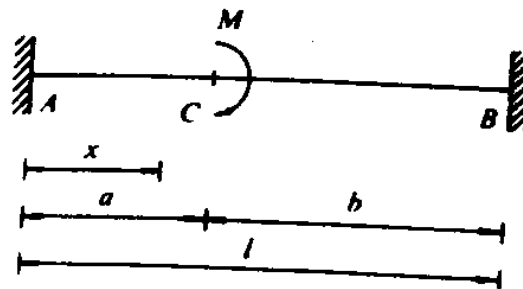
per tant els girs finals seran

$$\varphi_a = \frac{Ml}{6EI} \left(3 \frac{b^2}{l^2} - 1 \right) + \frac{Ml}{EI} \Omega = \frac{Ml}{6EI} \left(3 \frac{b^2}{l^2} - 1 + 6\Omega \right)$$

$$\varphi_b = \frac{Ml}{6EI} \left(3 \frac{a^2}{l^2} - 1 \right) + \frac{Ml}{EI} \Omega = \frac{Ml}{6EI} \left(3 \frac{a^2}{l^2} - 1 + 6\Omega \right)$$

3.5 La biga rígida amb un moment puntual

Una vegada coneguts els girs de la barra simple amb un moment puntual, podem aplicar en els extrems uns moments que provoquin uns girs contraris, $-\varphi_a$ i $-\varphi_b$, de forma que la barra es comporti com a rígida (encastada per l'altre costat) i observar les reaccions que es produeixen, tenint en compte les deformacions per tallant.



Al nus esquerre A aplicarem un moment M_{a1} que provoqui un gir $-\varphi_a$. Mantenint fix el nus B generarà un moment M_{b1} en el nus B i unes reaccions R_{a1} i R_{b1} a cada costat. Sabem per () i () que

$$M_{a1} = -\varphi_a \frac{4EI}{l} F_u = -2M \left(\frac{b^2}{l^2} - \frac{1}{3} + 2\Omega \right) F_u$$

per (2.32)

$$M_{b1} = -\varphi_b \frac{2EI}{l} F_{uu} = -M \left(\frac{b^2}{l^2} - \frac{1}{3} + 2\Omega \right) F_{uu}$$

per (2.36)
$$R_{a1} = -\varphi_a \frac{6EI}{l^2} F_{ss} = -\frac{M}{l} \left(3 \frac{b^2}{l^2} - 1 + 6\Omega \right) F_{ss}$$

$$R_{b1} = -R_{a1}$$

Al costat dret B aplicarem un moment M_{b2} que provoqui un gir $-\varphi_b$. Mantenint fix el nus A generarà un moment M_{a2} en el nus A i unes reaccions R_{a2} i R_{b2} a cada costat. Sabem per (2.29) i (3.8) que

$$M_{b2} = -\varphi_b \frac{4EI}{l} F_{tt} = -2M \left(\frac{a^2}{l^2} - \frac{1}{3} + 2\Omega \right) F_{tt}$$

per (2.32)
$$M_{a2} = -\varphi_b \frac{2EI}{l} F_{uu} = -M \left(\frac{a^2}{l^2} - \frac{1}{3} + 2\Omega \right) F_{uu}$$

per (2.36)
$$R_{a2} = -\varphi_b \frac{6EI}{l^2} F_{ss} = -\frac{M}{l} \left(3 \frac{a^2}{l^2} - 1 + 6\Omega \right) F_{ss}$$

$$R_{b2} = -R_{a2}$$

Així doncs, el moment M_a del costat esquerre valdrà $M_a = M_{a1} + M_{a2}$ i el moment M_b del costat dret valdrà $M_b = M_{b1} + M_{b2}$

$$M_a = -M \left(2 \left(\frac{b^2}{l^2} - \frac{1}{3} + 2\Omega \right) F_{tt} + \left(\frac{a^2}{l^2} - \frac{1}{3} + 2\Omega \right) F_{uu} \right) \quad (3.10)$$

$$M_b = -M \left(2 \left(\frac{a^2}{l^2} - \frac{1}{3} + 2\Omega \right) F_{tt} + \left(\frac{b^2}{l^2} - \frac{1}{3} + 2\Omega \right) F_{uu} \right) \quad (3.11)$$

Quant a les reaccions hiperestàtiques R_a i R_b , haurem de sumar els valors R_{a1} i R_{a2} al valor R_{ai} isostàtic que és un valor conegut $R_{ai} = M/l$

$$R_a = R_{ai} + R_{a1} + R_{a2} = \frac{M}{l} - \frac{M}{l} \left(3 \frac{b^2}{l^2} - 1 + 6\Omega \right) F_{ss} - \frac{M}{l} \left(3 \frac{a^2}{l^2} - 1 + 6\Omega \right) F_{ss}$$

$$R_a = \frac{M}{l} \left(1 - \left(3 \frac{a^2 + b^2}{l^2} - 2 + 12\Omega \right) F_{ss} \right) \quad ; \quad R_b = -R_a \quad (3.12)$$

Evidentment, també podríem calcular R_a i R_b a partir de l'equilibri de moments acció i reacció $M = M_a + M_b + R_a l$, la qual cosa és més convenient si ja es coneixen els valors dels moments M_a i M_b

$$R_a = \frac{M - M_a - M_b}{l} \quad (3.13)$$

3.6 La biga articulada-encastada amb un moment puntual

Si només volem simular l'encastament per un costat (el dret, per exemple), podem aplicar en aquell extrem un moment que provoqui un gir contrari $-\varphi_b$, de forma que la barra es comporti com a rígida (encastada) pel costat B i articulada pel costat A , i tot seguit observar les deformacions i reaccions que es produeixen tenint en compte les deformacions per tallant.

Al costat dret B aplicarem un moment M_b que provoqui un gir $-\varphi_b$. Tal com hem vist en l'apartat 2.5

$$M_b = -\varphi_b \frac{3EI}{l} F_{vv} = \frac{M}{2} \left(3 \frac{a^2}{l^2} - 1 + 6\Omega \right) F_{vv}$$

$$R_{b1} = -\varphi_b \frac{3EI}{l^2} F_{vv} = \frac{M}{2l} \left(3 \frac{a^2}{l^2} - 1 + 6\Omega \right) F_{vv}$$

$$R_{a1} = -R_{b1}$$

Així doncs ja coneixem el moment M_b d'encastament del costat dret i les reaccions produïdes pel gir $-\varphi_b$ que cal sumar a les isostàtiques per tal d'obtenir les reaccions totals. Tenint en compte que les reaccions isostàtiques són $R_{ai} = M/l$, $R_{bi} = -R_{ai}$

$$R_a = R_{ai} + R_{a1}$$

Però també sabem que les reaccions R_a i R_b han d'equilibrar el moment de l'acció M i el moment de la reacció M_b , per tant

$$R_a = -\frac{M + M_b}{l}$$

$$R_b = -R_a \quad (3.12)$$

3.7 La biga simple amb una càrrega trapezial

Es tracta d'estudiar la deformació d'una biga simple amb una càrrega contínua no uniforme, és a dir el valor de la càrrega q_a en el nus A no és el mateix que la càrrega q_b en el nus B .

Les reaccions isostàtiques són

$$R_a = \frac{l}{6}(2q_a + q_b) \quad ; \quad R_b = \frac{l}{6}(q_a + 2q_b)$$

Sabem que l'equació de l'elàstica (la fletxa) deguda als esforços de flexió és

$$\delta_f = \frac{x(l-x)}{360EI} \left(3(q_a - q_b)x^3 - 3(4q_a + q_b)lx^2 + (8q_a + 7q_b)l^2x + (8q_a + 7q_b)l^3 \right)$$

i que els girs dels extrems A i B valen

$$\varphi_a = -\frac{l^3}{360EI}(8q_a + 7q_b) \quad ; \quad \varphi_b = \frac{l^3}{360EI}(7q_a + 8q_b)$$

i sabem també que aquests girs no variaran per l'efecte del tallant. En canvi, si que caldrà afegir a l'equació de l'elàstica la deformació produïda pel tallant. Per això necessitem saber l'equació de l'esforç tallant al llarg de la barra. Aquesta és

$$V_L = R_a - \frac{q_a(2l-x) + q_b x}{2l} x = R_a - q_a x - \frac{(q_b - q_a)x^2}{2l}$$

Segons el punt d'aplicació de la força unitària, el punt z , on volem saber la fletxa, els valors de V_U són

$$V_U = (l-z)/l \quad \text{a l'esquerra del punt on volem saber la fletxa}$$

$$V_U = -z/l \quad \text{a la dreta del punt on volem saber la fletxa}$$

per tant

$$\delta_s = \int_0^z \frac{f_s V_U V_L dx}{GA} + \int_z^l \frac{f_s V_U V_L dx}{GA}$$

$$\delta_s = \frac{f_s}{GA} \left(\int_0^z V_U V_L dx + \int_z^l V_U V_L dx \right) = \frac{f_s}{GA} \left((l-z) \int_0^z V_L dx - z \int_z^l V_L dx \right) = \frac{f_s}{GA} \left(l \int_0^z V_L dx - z \int_0^l V_L dx \right)$$

$$\delta_s = \frac{f_s}{GA} \left(l \int_0^z R_a - q_a x - \frac{(q_b - q_a)x^2}{2l} dx - z \int_0^l R_a - q_a x - \frac{(q_b - q_a)x^2}{2l} dx \right)$$

$$\delta_s = \frac{f_s}{GA^2} \frac{lz(l-z)}{2} \left(q_a l + \frac{(q_b - q_a)(l+z)}{3} \right)$$

substituint z per x obtenim la forma tradicional de l'elàstica produïda per l'esforç tallant d'una càrrega trapezoidal total (del nus esquerre al dret) en una barra isostàtica

$$\delta_s = \frac{lx(l-x)\Omega}{2EI} \left(q_a l + \frac{(q_b - q_a)(l+x)}{3} \right)$$

3.8 La biga rígida amb una càrrega trapezoidal

Una vegada coneguts els girs de la barra simple amb una càrrega trapezoidal, podem aplicar en els extrems uns moments que provoquin uns girs contraris, $-\varphi_a$ i $-\varphi_b$, de forma que la barra es comporti com a rígida (encastada per l'altre costat) i observar les reaccions que es produeixen, tenint en compte les deformacions per tallant.

Al nus esquerre A aplicarem un moment M_{a1} que provoqui un gir $-\varphi_a$. Mantenint fix el nus B generarà un moment M_{b1} en el nus B i unes reaccions R_{a1} i R_{b1} a cada costat. Sabem per () i () que

$$M_{a1} = -\varphi_a \frac{4EI}{l} F_{tt} = \frac{l^2}{90} (8q_a + 7q_b) F_{tt}$$

$$M_{b1} = -\varphi_a \frac{2EI}{l} F_{uu} = \frac{l^2}{180} (8q_a + 7q_b) F_{uu}$$

per (2.36)
$$R_{a1} = -\varphi_a \frac{6EI}{l^2} F_{ss} = \frac{l}{60} (8q_a + 7q_b) F_{ss}$$

$$R_{b1} = -R_{a1}$$

Al costat dret B aplicarem un moment M_{b2} que provoqui un gir $-\varphi_b$. Mantenint fix el nus A generarà un moment M_{a2} en el nus A i unes reaccions R_{a2} i R_{b2} a cada costat. Sabem per (2.29) i (3.8) que

$$M_{b2} = -\varphi_b \frac{4EI}{l} F_{tt} = -\frac{l^2}{90} (7q_a + 8q_b) F_{tt}$$

$$M_{a2} = -\varphi_b \frac{2EI}{l} F_{uu} = -\frac{l^2}{180} (7q_a + 8q_b) F_{uu}$$

per (2.36)
$$R_{b2} = -\varphi_b \frac{6EI}{l^2} F_{ss} = -\frac{l}{60} (7q_a + 8q_b) F_{ss}$$

$$R_{a2} = -R_{b2}$$

Així doncs, el moment M_a del costat esquerre valdrà $M_a = M_{a1} + M_{a2}$ i el moment M_b del costat dret valdrà $M_b = M_{b1} + M_{b2}$

$$M_a = \frac{l^2}{180} (2(8q_a + 7q_b)F_{tt} - (7q_a + 8q_b)F_{uu}) \quad (3.10)$$

$$M_b = \frac{l^2}{180} ((8q_a + 7q_b)F_{uu} - 2(7q_a + 8q_b)F_{tt}) \quad (3.11)$$

Quant a les reaccions hiperestàtiques R_a i R_b , haurem de sumar els valors R_{a1} i R_{a2} i els valors R_{b1} i R_{b2} als valors R_{ai} i R_{bi} isostàtics, que són valors coneguts.

$$R_{ai} = \frac{l}{6} (2q_a + q_b) \quad ; \quad R_{bi} = \frac{l}{6} (q_a + 2q_b)$$

$$R_a = R_{ai} + R_{a1} + R_{a2} = \frac{l}{6} \left((2q_a + q_b) - \frac{1}{10} (q_b - q_a) F_{ss} \right)$$

$$R_b = R_{bi} + R_{b1} + R_{b2} = \frac{l}{6} \left((q_a + 2q_b) + \frac{1}{10} (q_b - q_a) F_{ss} \right)$$